

DOI: 10.7652/xjtuxb201606002

具有恶化效应的双代理单机最优调度算法

刘岳镭, 冯祖仁, 任晓栋

(西安交通大学机械制造系统工程国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 针对单机床加工环境中待加工任务具有恶化效应且来自 2 个具有不同需求的代理时, 无法快速求解出满足要求且成本最低的最优加工序列的情况, 提出了可在特定约束条件下的具有恶化效应的双代理单机最优调度算法。首先提出优化目标为: 保证一个代理的任务均不延迟完工的前提下, 使得另一个代理的总加权完成时间或总加权折扣完成时间最小; 其次指出该优化问题具有 NP 难度, 并给出其在一般及特殊情况下最优解的结构性质; 此后对于特定约束条件下情形, 提出多项式时间优化算法。该算法中首先将 2 个代理的任务分别按照所证明的最优策略排序, 然后再按照使得 2 个代理能得到最小总加权完成时间和给定约束关系的算法将 2 个序列合并在一起, 并证明得出的序列即为所求调度问题的最优解。实验结果表明, 该算法作为确定性算法, 计算时间与最优解平均误差率大于 0.3% 的模拟退火算法相似, 远远低于可求解出最优解的分支定界算法。

关键词: 调度问题; 单机; 双代理; 恶化效应

中图分类号: TP29 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2016)06-0009-06

An Optimal Scheduling Algorithm on Single-Machine with Two-Agent and Deteriorating Jobs

LIU Yuelei, FENG Zuren, REN Xiaodong

(State Key Laboratory for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Two-agent single-machine scheduling problems with a deterioration job of which the actual processing time is defined as a function of its starting time are investigated. Optimization algorithms of polynomial time under some certain constraints are proposed. The optimization target of the problem is formulated as to minimize the total weighted completion time or total weighted discounted completion time of one agent while ensuring that all the jobs on the other agents are not delayed. This optimization problem is proved NP-hard and the structural properties of its optimal solutions under general and special conditions are illustrated. Optimization algorithms of polynomial time for solving these scheduling problems are proposed under some constraints. First, the jobs from two agents are respectively sequenced according to their optimal structural properties. Then, they are combined following the strategies that ensure the optimization target of two agents. Simulation results and comparisons with scheduling results of the simulated annealing (SA) and the branch-and-bound algorithms show that the CPU-times of the proposed algorithms are similar with the SA's that has an error rate greater than 0.3% with the optimal solutions, and much smaller than that of the branch-and-bound algorithm.

Keywords: scheduling; single-machine; two agents; deteriorating jobs

收稿日期: 2015-11-09。 作者简介: 刘岳镭(1986—), 男, 博士生; 冯祖仁(通信作者), 男, 教授, 博士生导师。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61203350)。

网络出版时间: 2016-04-03

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20160403.1822.006.html>

不同于经典调度问题,在现实生产环境中,经常会遇到待加工任务来自不同的代理,且任务的加工时间具有恶化效应的情况。在这种复杂情况下,如何同时面对不同代理的不同需求,依然获得任务加工调度的最优解,成为了研究的难点。

1988年,Gutpa提出了一种任务的加工时间是它们开始(等待)时间的单调递增函数的调度问题模型,首次提出了任务加工中的恶化效应^[1]。出乎意料的是,这一模型并未得到广泛关注,直到十多年后才有学者对任务加工时间具有恶化效应的不同模型的调度问题进行了详细的描述^[2-3]。文献[4]针对最大完工时间、总加权完成时间等优化目标的单机线性恶化调度问题给出了多项式时间算法;文献[5]在引入释放时间的基础上,对特殊约束下的恶化调度问题给出了最优算法。

在此前的调度问题中,大部分待加工任务均来自同一代理,然而实际生产活动中,这一假设可能在某些情况下无效,即需要加工的任务可能来自于多个代理。涉及多个代理的调度问题在近年来成为了一个新兴的研究课题。大量研究者证明了多种调度问题在单机模型下具有NP难度:多代理的优化目标同时为最小化总加权延迟完工任务数或最小化任务最大完成时间^[6];保证一个代理最大提前完工时间不超过给定值的前提下最小化另一个代理的最大提前完成时间或加权提前完成时间和^[7];最小化一个代理的加权最大完成时间与另一个代理的加权完成时间和的总和^[8]等。

直到2010年以后,才有学者将恶化效应引入到双代理问题中来,并取得了一系列研究成果:文献[9]针对一个代理最大延迟完成时间小于给定上界、另一个代理加权延迟完工任务数总和最小的调度问题,提出了分支定界算法和禁忌搜索算法求解最优和近优解;文献[10]讨论一个代理的最大完工时间不超过一个给定上界的约束下,另一个代理的总完工时间最小的调度问题,给出多项式时间最优算法;文献[11-12]分别针对特殊情况下,优化目标关于推迟/提前完工时间的一些调度问题模型,同样给出了多项式时间算法。本文针对单机环境下具有恶化效应的双代理调度问题下的一个模型的多个加权优化目标进行了研究,指出了问题的NP难度,讨论最优解结构特征,并以此为依据给出特定情形下的多项式时间算法。

1 恶化效应的单机双代理问题模型

本文主要讨论单机环境下的以下调度问题:假

设存在 n 个任务, $J=\{J_1, J_2, \dots, J_n\}$,来自2个不同的代理 $X=\{A, B\}$, $n=n_A+n_B$,其中 n_A 和 n_B 分别为来自代理 A 和 B 的任务数量。对于每项任务 J_j 都有初始(基础)加工时间 p_j ,权值 w_j ,交货日期 d_j 以及代理参数 I_j ,且有当 $J_j \in A$ 时 $I_j=0$, $J_j \in B$ 时 $I_j=1$ 。考虑到恶化效应,若任务 J_j 在 t 时刻开始加工,则实际加工时间为 $p_j(a+bt)$,其中 $a>0$ 为给定参数, $b \geq 0$ 为给定恶化参数。对于一个调度解 S ,任务 J_j 的完工时间表示为 $C_j(S)$,任务 J_j 的延迟交货时间表示为 $T_j(S)=\max\{0, C_j(S)-d_j\}$,当 $T_j(S)>0$ 时有 $U_j(S)=1$,否则 $U_j(S)=0$ 。

本文研究的调度目标为:在满足约束条件 $\sum_{j=1}^n U_j(S)I_j \leq 0$ 时,使得 $\sum_{j=1}^n w_j C_j(S)(1-I_j)$ 最小;在满足 $\sum_{j=1}^n U_j(S)I_j \leq 0$ 时,使得 $\sum_{j=1}^n w_j(1-\exp(-rC_j(S)))(1-I_j)$ 最小,其中 $r \in (0,1)$ 为折扣因子。

使用 $\alpha|\beta|\gamma$ 三参数表示法^[13],本文讨论的问题模型可以分别被写作

$$1 | d_j, p_j(a+bt) | \sum_{j=1}^n w_j C_j(S)(1-I_j) : \sum_{j=1}^n U_j(S)I_j \leq 0 \quad (1)$$

$$1 | d_j, p_j(a+bt) | \sum_{j=1}^n w_j(1-\exp(-rC_j(S)))(1-I_j) : \sum_{j=1}^n U_j(S)I_j \leq 0 \quad (2)$$

式中: α 域中的1表示单机加工环境; γ 域中的符号表示其之前的部分为优化目标,而其之后的部分为需保证的约束条件。

2 优化调度算法

2.1 代理B不延迟且代理A总加权完成时间最小的调度问题

调度问题1 $\parallel \sum_{j=1}^n w_j C_j(S)(1-I_j) : \sum_{j=1}^n U_j(S)I_j \leq 0$ 已经被证明为NP难问题^[5],显然调度问题 $1 | d_j, p_j(a+bt) | \sum_{j=1}^n w_j C_j(S)(1-I_j) : \sum_{j=1}^n U_j(S)I_j \leq 0$ 同样为NP难问题。本节将给出特定约束条件下,即当代理 A 的任务具有权值与初始加工时间反相关约束(即对于任务 J_i 和 J_j ,当 $p_i \leq p_j$ 时一定有 $w_i \geq w_j$)时的最优解算法,并证明该算法可在多项式时间复杂度内有效解决问题。在此之前,先给出

以下引理。

引理 1 对于给定的一个调度解 $S = (J_{[1]}, J_{[2]}, \dots, J_{[n]})$, 式中 $J_{[n]}$ 表示在加工序列第 n 位加工的任务, 若任务 $J_{[1]}$ 开始加工于初始时间 t_0 , 则加工序列中第 h 位加工的任务 $J_{[h]}$ 的完成时间为 $\left(t_0 + \frac{a}{b}\right) \prod_{j=1}^h (1 + bp_{[j]}^X) - \frac{a}{b}$, 其中 $p_{[j]}^X$ 为调度解 S 中第 j 位被加工的来自代理 X 的任务 $J_{[j]}^X$ 的初始加工时间。任务的最大完成时间为 $\left(t_0 + \frac{a}{b}\right) \prod_{h=1}^{n_A} (1 + bp_h^A) \prod_{h=1}^{n_B} (1 + bp_h^B) - \frac{a}{b}$ 。

证明 采用数学归纳法证明

(1) $n = 1$ 时, 有 $C_{[1]} = t_0 + p_{[1]}^X(a + bt_0) = \left(t_0 + \frac{a}{b}\right)(1 + bp_{[1]}^X) - \frac{a}{b}$;

(2) 假设 $n = j$ 时, 有 $C_{[j]} = \left(t_0 + \frac{a}{b}\right) \prod_{i=1}^j (1 + bp_{[i]}^X) - \frac{a}{b}$; 那么, 当 $n = j + 1$ 时, 任务 $J_{[j+1]}$ 有 $C_{[j+1]} = C_{[j]} + p_{[j+1]}^X(a + bC_{[j]}) = \left(t_0 + \frac{a}{b}\right) \prod_{i=1}^{j+1} (1 + bp_{[i]}^X) - \frac{a}{b}$ 。

综上所述步骤(1)、(2)所述, 可归纳证明, 对于任务加工序列中任意任务 $J_{[h]}$ 的加工完成时间为 $\left(t_0 + \frac{a}{b}\right) \prod_{j=1}^h (1 + bp_{[j]}^X) - \frac{a}{b}$, 由此可得任务的最大完成时间为 $C_{\max} = \left(t_0 + \frac{a}{b}\right) \prod_{h=1}^{n_A} (1 + bp_h^A) \prod_{h=1}^{n_B} (1 + bp_h^B) - \frac{a}{b}$ 。

引理 1 得证。

引理 2 令 $u = \left(t_0 + \frac{a}{b}\right) \prod_{h=1}^{n_A} (1 + bp_h^A) \prod_{h=1}^{n_B} (1 + bp_h^B) - \frac{a}{b}$, 存在一个来自代理 B 的任务 J_k^B 满足 $u < d_k$, 则最优解加工序列中 J_k^B 被最后一位加工, 且代理 A 的任务被最后加工的调度解不可能为最优解。

证明 采用反证法证明。假设有一个最优调度解 S 其中任务 J_k^B 不是在最后一位被加工。将 S 中的任务 J_k^B 改为在最后一位被加工, 得到新的调度解 S' 。由于 S 中在任务 J_k^B 前被加工的任务的加工时间未受调整的影响, 故对于此类任务均有 $C_i^X(S') = C_i^X(S)$, $X \in \{A, B\}$ 。显而易见, 在 S 中那些在任务 J_k^B 之后被加工的任务的加工完成时间要大于相应

任务在 S' 中的加工完成时间, 即对于此类任务有 $C_i^X(S') < C_i^X(S)$, $X \in \{A, B\}$ 。综上可得, 对于 J_k^B 之外的所有任务均有 $C_i^X(S') \leq C_i^X(S)$ 。考虑到 S 为最优解, 则可得 $C_i^B(S) < d_i$, 故也必有 $C_i^B(S') \leq d_i$ 。由引理 1 可知, J_k^B 在调度解 S' 中的加工完成时间为 $\left(t_0 + \frac{a}{b}\right) \prod_{h=1}^{n_A} (1 + bp_h^A) \prod_{h=1}^{n_B} (1 + bp_h^B) - \frac{a}{b} = u$, 又有 $u < d_k$, 则 S' 为一个可行调度解。又由于 $C_i^X(S') \leq C_i^X(S)$, 可以得出 $\sum w_i C_i^A(S') \leq \sum w_i C_i^A(S)$, 这与 S 为最优解的假设相矛盾, 由此可知, 最优解中 J_k^B 应在最后一位加工。

假设调度解 S 中, 最后一个被加工的任务来自代理 A , 同样操作得到新的调度解 S' 。同上可得 $\sum w_i C_i^A(S') < \sum w_i C_i^A(S)$, 这说明 S' 是一个优于 S 的调度解, 则证明了最后一个被加工的任务来自代理 A 的调度解不可能为最优解。证毕。

引理 3 该问题最优解的任务加工序列中, 代理 B 的任务按照其交货日期 d_j 非降序排列。

证明 采用反证法证明。假设存在一个最优解 S , 其中代理 B 的任务并不是按照交货日期 d_j 非降序排列, 则至少存在 2 个任务 J_l^B 和 J_h^B 满足 $d_l > d_h$, 且在调度序列中, J_l^B 优先被加工, 之后有一组代理 A 的任务被加工, 记作 π , 再之后是 J_h^B , 并用 π' 表示 J_h^B 之后被加工的任务序列。将最优解 S 中任务 J_l^B 单独调整至 J_h^B 之后加工, 其余任务加工次序不变, 得到新的调度解 S' 。由引理 1 可知, 任务 J_h^B 在 S 中的完成加工时间与任务 J_l^B 在 S' 中的完成加工时间相同, 即 $C_h^B(S) = C_l^B(S')$, 所以 π' 中任务的完成加工时间在 S 和 S' 中是完全一致的。既然 S 为可行解, 则一定有 $C_l(S') = C_h(S) \leq d_h < d_l$, 可知 J_l^B 在 S' 中满足约束 $C_l(S') < d_l$ 。序列 π 中的任务以及任务 J_h^B 在 S' 的开始加工时间早于在 S 中, 且其基础加工时间不变, 故其在 S' 中的加工完成时间一定早于在 S 中的加工完成时间。综上可得 $C_i^X(S') \leq C_i^X(S)$, 即可以得出 $\sum w_i C_i^A(S') \leq \sum w_i C_i^A(S)$, 这与 S 为最优解的假设相矛盾, 故最优解中代理 B 的任务按照其交货日期 d_j 非降序排列。引理得证。

引理 4 假设有调度解 S , 其中有 2 个相邻任务 J_i 和 J_j , 其中 J_i 先于 J_j 被加工。现将任务 J_i 与 J_j 的加工次序互换, 得到新的调度解 S' , 在此基础上假设任务 J_i 在调度解 S 中的开始加工时间为 t 。若 $J_i, J_j \in A$ 且有 $w_j p_i(1 + bp_j) < w_i p_j(1 + bp_i)$, 则调

度解 S 优于调度解 S' 。

证明 任务 J_i 在调度解 S 和调度解 S' 中的加工完成时间分别为

$$C_i(S) = p_i(a + bt) + t \quad (3)$$

$$C_j(S) = p_j(a + bC_i(S)) + C_i(S) = p_i(a + bt) + p_j(a + bt) + p_i p_j b(a + bt) + t \quad (4)$$

$$C_j(S') = p_j(a + bt) + t \quad (5)$$

$$C_i(S') = p_i(a + bC_j(S')) + C_j(S') = p_i(a + bt) + p_j(a + bt) + p_i p_j b(a + bt) + t \quad (6)$$

由此可得

$$\begin{aligned} w_i C_i(S) + w_j C_j(S) - (w_i C_i(S') + w_j C_j(S')) = \\ w_j p_i (1 + b p_j)(a + bt) - w_i p_j (1 + b p_i)(a + bt) \end{aligned} \quad (7)$$

则当 $w_j p_i (1 + b p_j) < w_i p_j (1 + b p_i)$ 时, 有 $w_i C_i(S) + w_j C_j(S) < w_i C_i(S') + w_j C_j(S')$, 且有 $C_j(S) = C_i(S')$, 综上, 调度解 S 优于 S' 。证毕。

引理 5 若该调度问题中, 代理 A 的任务具有权值与初始加工时间的反相关约束, 则最优解中代理 A 的任务按照加权最短加工时间优先规则 (WSPT) 排序 (即按照 p_j/w_j 非降序排列)。

证明 采用反证法证明。假设存在一个最优解 S , 此最优解中代理 A 的任务并不是按照 WSPT 规则排列, 则至少存在 2 个任务 J_l^A 和 J_h^A 满足 $p_l/w_l > p_h/w_h$, 由于遵循权值与初始加工时间的反相关的约束, 则有 $p_l \geq p_h$ 和 $w_l \leq w_h$ 。在最优解 S 的加工序列中, 先将任务 J_l^A 在 T 时刻加工, 再将 J_l^A 之后被加工的一组代理 B 的任务记作 π , 然后将任务 J_h^A 在 π 之后加工, 最后将 J_h^A 之后被加工的任务记作 π' 。将 S 中任务 J_l^A 与 J_h^A 交换, 其余任务加工次序不变, 得到 S' 。

由引理 1 可知, 任务 J_h^A 在 S 中的完成加工时间与任务 J_l^A 在 S' 中的完成加工时间相同, 即 $C_h^A(S) = C_l^A(S')$, 所以 π' 中的任务的开始加工时间不变, 其完成时间并不受任务 J_l^A 与 J_h^A 交换的影响, 在 S 和 S' 中是完全一致的。由于 $p_l \geq p_h$, 则有 $C_h^A(S') = T + p_h(a + bT) \leq T + p_l(a + bT) = C_l^A(S)$, 序列 π 中的任务在 S' 的开始加工时间早于在 S 中, 且其基础加工时间不变, 故其在 S' 中的加工完成时间一定早于在 S 中, 即有 $C_k^B(S') \leq C_k^B(S)$ 。由于 S 为最优解, 则对于序列 π 中来自代理 B 的每一个任务都一定必然满足 $C_k^B(S) \leq d_k$, 故 $C_k^B(S') \leq d_k$, 则调度解 S' 一定为可行解。

已知 $C_h^A(S) = C_l^A(S')$, $C_h^A(S') \leq C_l^A(S)$, 则可得 $w_l C_l^A(S) + w_h C_h^A(S) - (w_h C_h^A(S') + w_l C_l^A(S')) \geq$

$$\begin{aligned} w_l C_h^A(S') + w_h C_l^A(S') - (w_h C_h^A(S') + w_l C_l^A(S')) = \\ (w_l - w_h)(C_h^A(S') - C_l^A(S')) \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

由此可得 $w_h C_h^A(S') + w_l C_l^A(S') \leq w_l C_l^A(S) + w_h C_h^A(S)$, 这与 S 为最优解相矛盾, 由此可知, 最优解中代理 A 的任务按照 WSPT 规则排序。引理 5 得证。

对于代理 B 不延迟且代理 A 总加权完成时间性最小的调度问题, 在来自代理 A 的任务遵循权值与初始加工时间的反相关约束这一特殊情况下, 由引理 2、3 和 5, 可给出如下算法。

算法 1 代理 B 不延迟且代理 A 总加权完成时间最小问题的最优解算法步骤如下。

步骤 1 令 $T = \left(t_0 + \frac{a}{b}\right) \prod_{h=1}^{n_A} (1 + b p_h^A) \prod_{h=1}^{n_B} (1 + b p_h^B) - \frac{a}{b}$, $i = n_A$, $j = n_B$, $l = n_A + n_B$, 将代理 A 的任务按照 p_k/w_k 非降序排列, 即 $p_{[1]}/w_{[1]} \leq \dots \leq p_{[n_A]}/w_{[n_A]}$, 将代理 B 的任务按照其交货日期 d_j 非降序排列, 即 $d_{[1]} \leq d_{[2]} \leq \dots \leq d_{[n_B]}$ 。

步骤 2 如果 $j \geq 1$ 且 $T \leq d_{[j]}$, 则将任务 $J_{[j]}^B$ 排至队列的第 l 位, 令 $T = (T - a p_{[j]}^B)/(1 + b p_{[j]}^B)$, $l = l - 1$, $j = j - 1$, 并跳转至步骤 2; 否则, 跳转至步骤 3。

步骤 3 如果 $i \geq 1$, 则将任务 $J_{[i]}^A$ 排至队列的第 l 位, 令 $T = (T - a p_{[i]}^A)/(1 + b p_{[i]}^A)$, $l = l - 1$, $i = i - 1$, 并跳转至步骤 4; 又如果 $i < 1$ 且 $j \geq 1$, 输入该问题无可行解, 结束算法。否则, 跳转至步骤 4。

步骤 4 如果 $i \geq 1$ 或 $j \geq 1$, 则跳转至步骤 2, 否则输出加工序列 $S = (J_{[1]}, J_{[2]}, \dots, J_{[n_A + n_B]})$, 算法结束。

定理 1 如果代理 A 的任务遵循权值与初始加工时间反相关的约束, 则对于该调度问题, 算法 1 可求解出最优解, 且其计算的时间复杂度为 $O(n_A \log n_A + n_B \log n_B)$ 。

证明 算法 1 中, 代理 B 和代理 A 的任务分别依照引理 3 和引理 5 的方式排序, 再根据引理 2 将 2 个排序组合为可行解。引理 2、引理 3 以及引理 5 的证明保障了算法 1 可以求得最优解。步骤 1 中关于代理 A 和代理 B 的任务排序, 其时间复杂度分别为 $O(n_A \log n_A)$ 和 $O(n_B \log n_B)$, 故整个算法的时间复杂度为 $O(n_A \log n_A + n_B \log n_B)$ 。证毕。

2.2 代理 B 不延迟且代理 A 总加权折扣完成时间最小的调度问题

由于已经有研究者证明了类似的调度问题

$$1 \parallel \sum_{j=1}^n w_j (1 - \exp(-r C_j(S))) (1 - I_j) : C_{\max}(S) I_j$$

$\leq Q$ 具有 NP 难度^[14],则本节中所研究的调度问题 $1 \mid d_j, p_j(a+bt) \mid \sum_{j=1}^n w_j(1 - \exp(-rC_j(S)))(1 - I_j) : \sum_{j=1}^n U_j(S)I_j \leq 0$ 同样为 NP 难问题。接下来,本节主要讨论特定约束条件下,即当代理 A 的任务具有权值与初始加工时间反相关约束时的最优解算法,并证明该算法可在多项式时间复杂度内有效解决问题。

引理 6 若该调度问题中,代理 A 的任务具有权值与初始加工时间的反相关约束,则存在一个最优解,其中代理 A 的任务按照加权折扣最短加工时间优先规则(WDSPT)排序(即按照 $(1 - \exp(-rp_j))/w_j \exp(-rp_j)$ 非降序排列)。

证明 采用反证法证明。类似引理 5 证明中的假设,假设一个最优解 S ,其中代理 A 的任务并不是按照 WDSPT 规则排列,则至少存在 2 个任务 J_l^A 和 J_h^A 满足 $\frac{1 - \exp(-rp_l)}{w_l \exp(-rp_l)} > \frac{1 - \exp(-rp_h)}{w_h \exp(-rp_h)}$,由于遵循权值与初始加工时间的反相关的约束,则有 $p_l \geq p_h$ 和 $w_l \leq w_h$ 。类似引理 5 的证明,可知 $C_h^A(S) = C_l^A(S')$, $C_h^A(S') \leq C_l^A(S)$ 以及对于其他所有任务有 $C_k(S') \leq C_k(S)$, $J_k \in J^X / \{J_l^A, J_h^A\}$ 。由此可知,新调度解 S' 为可行解。

已知 $r \in (0, 1)$, $C_h^A(S) = C_l^A(S')$ 以及 $C_h^A(S') \leq C_l^A(S)$, 可得

$$\begin{aligned} & w_l(1 - \exp(-rC_l^A(S))) + w_h(1 - \exp(-rC_h^A(S))) - (w_h(1 - \exp(-rC_h^A(S'))) + \\ & w_l(1 - \exp(-rC_l^A(S')))) \geq w_h \exp(-rC_h^A(S')) + \\ & w_l \exp(-rC_l^A(S')) - w_l \exp(-rC_h^A(S')) - \\ & w_h \exp(-rC_l^A(S')) = (w_h - w_l)(\exp(-rC_h^A(S')) - \\ & \exp(-rC_l^A(S'))) \geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

由此可得

$$\begin{aligned} & w_h(1 - \exp(-rC_h^A(S'))) + w_l(1 - \exp(-rC_l^A(S'))) \leq w_l(1 - \exp(-rC_l^A(S))) + \\ & w_h(1 - \exp(-rC_h^A(S))) \end{aligned} \quad (10)$$

这与 S 为最优解的假设相矛盾,故最优解中代理 A 的任务按照 WDSPT 规则排序,证毕。

对于代理 B 不延迟且代理 A 总加权折扣完成时间最小的调度问题,在来自代理 A 的任务遵循权值与初始加工时间的反相关约束这一特殊情况下,由引理 2、3 和 6,可给出如下算法。

算法 2 代理 B 不延迟且代理 A 总加权折扣完成时间最小问题的最优解算法步骤如下。

步骤 1 令 $T = \left(t_0 + \frac{a}{b}\right) \prod_{h=1}^{n_A} (1 + bp_h^A) \prod_{h=1}^{n_B} (1 + bp_h^B) - \frac{a}{b}$, $i = n_A, j = n_B, l = n_A + n_B$, 将代理 A 的所

有任务按照 $\frac{1 - \exp(-rp_k)}{w_l \exp(-rp_k)}$ 非降序排列,即满足 $\frac{1 - \exp(-rp_{[1]})}{w_{[1]} \exp(-rp_{[1]})} \leq \dots \leq \frac{1 - \exp(-rp_{[n_A]})}{w_{[n_A]} \exp(-rp_{[n_A]})}$, 将代理 B 的任务按照其交货日期 d_j 非降序排列,即 $d_{[1]} \leq d_{[2]} \leq \dots \leq d_{[n_B]}$ 。

步骤 2 如果 $j \geq 1$ 且 $T \leq d_{[j]}$, 则将 $J_{[j]}^B$ 排至队列第 l 位,令 $T = (T - ap_{[j]}^B)/(1 + bp_{[j]}^B)$, $l = l - 1, j = j - 1$, 并跳转至步骤 2; 否则,跳转至步骤 3。

步骤 3 如果 $i \geq 1$, 则将任务 $J_{[i]}^A$ 排至队列的第 l 位,令 $T = (T - ap_{[i]}^A)/(1 + bp_{[i]}^A)$, $l = l - 1, i = i - 1$, 并跳转至步骤 4; 又如果 $i < 1$ 且 $j \geq 1$, 输入该问题无可行解,结束算法。否则,跳转至步骤 4。

步骤 4 如果 $i \geq 1$ 或 $j \geq 1$, 则跳转至步骤 2, 否则输出加工序列 $S = (J_{[1]}, J_{[2]}, \dots, J_{[n_A + n_B]})$, 算法结束。

定理 2 如果代理 A 的任务遵循权值与初始加工时间反相关的约束,则对于该调度问题,算法 2 可求解出最优解,且其计算的时间复杂度为 $O(n_A \log n_A + n_B \log n_B)$ 。

证明 同定理 1。

3 仿真结果

为了评估本文给出的具有恶化效应的双代理单机最优调度算法,将其与文献[15]中给出的分支定界算法(B&B)以及模拟退火算法(SA)进行对比。采用的算例与文献[15]生成方式类似,假设 2 个代理的任务数量相同,分别对应 $n = 10, 12, 14, a = 1$, 以及不同的恶化参数 $b = 0.002, 0.005$, 在保证代理 A 的任务遵循权值与初始加工时间反相关的约束的前提下,生成了多组各 30 个的随机数据。由于本文的 2 个算法类似,故只针对算法 1 进行仿真对比。此外,为了与 SA 算法进行比较,定义如下最优解平均误差率

$$r_{\text{error}} = \frac{\sum_{j=1}^{n_a} w_j C_j^A(S_{\text{SA}}) - T}{T} \times 100\% \quad (11)$$

式中: S_{SA} 表示 SA 算法得到的近优解; T 表示最优解所对应的代理 A 的总加权完成时间。

表 1 为 3 种算法计算时间的对比。从表 1 中可以看出: B&B 算法的 CPU 时间远大于其他 2 种算

法,这是因为为了求解出问题的最优解,B&B 算法需要经历大量节点的计算,并且 B&B 算法的 CPU 时间会随着问题规模的小幅增大而剧烈增加;另一方面,SA 算法所需计算时间与本文的确定性最优解算法 1 类似,但却只能在接近的计算时间内获得问题的近优解,且 SA 算法的解质量的平均误差率也会随着问题规模增加而变大(当 $n=10$ 时, $r_{\text{error}}\approx 0.3\%$;当 $n=14$ 时, $r_{\text{error}}\approx 1.4\%$)。

表 1 3 种算法的计算时间对比

n	b	CPU 时间/s		
		B&B	SA	本文算法 1
10	0.002	16.83	0.405	0.384
	0.005	18.52	0.374	0.362
12	0.002	46.82	0.632	0.574
	0.005	45.34	0.658	0.537
14	0.002	253.46	0.834	0.782
	0.005	289.63	0.783	0.833

4 结 论

本文针对单机床环境下任务来自 2 个不同的代理且任务的加工时间具有与任务开始加工时间相关的恶化效应的调度问题,在优化目标为保证一个代理的任务均不延迟完工的前提下使得另一个代理的总加权完成时间或总加权折扣完成时间最小,指出问题具有 NP 难度,并提出在特定约束条件下的时间复杂度为 $O(n_A\log n_A + n_B\log n_B)$ 的最优解算法(算法 1 和算法 2)。仿真结果表明:采用本文提出的最优解算法可以高效地求解出满足要求且成本最低的最优加工序列。

虽然本文算法 1 和算法 2 仅能对这类问题的特例加以求解,但它们也为一般性问题最优解或近优解算法提供了有效的启发信息。更一般性的问题仍然有待进一步研究与解决。

参考文献:

[1] GUPTA J N D, GUPTA S K. Single facility scheduling with nonlinear processing times [J]. Computers & Industrial Engineering, 1988, 14(4): 387-393.

[2] ALIDAEE B, WOMER N K. Scheduling with time dependent processing times: review and extensions [J]. Journal of the Operational Research Society, 1999, 50(7): 711-720.

[3] CHENG T C E, DING Q, LIN B M T. A concise sur-

vey of scheduling with time-dependent processing times [J]. European Journal of Operational Research, 2004, 152(1): 1-13.

[4] 赵传立, 张庆灵, 唐恒永. 具有线性恶化加工时间的调度问题 [J]. 自动化学报, 2003, 29(4): 531-535. ZHAO Chuanli, ZHANG Qingling, TANG Hengyong. Scheduling problems under linear deterioration [J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29(4): 531-535.

[5] 赵晓丽, 唐立新. 带有线性恶化工件和释放时间的 2 个代理单机调度问题 [J]. 自动化学报, 2015, 41(1): 104-112. ZHAO Xiaoli, TANG Lixin. Two-agent scheduling with linear-deteriorating jobs and release dates on a single machine [J]. Acta Automatica Sinica, 2015, 41(1): 104-112.

[6] CHENG T C E, NG C T, YUAN J J. Multi-agent scheduling on a single machine with max-form criteria [J]. European Journal of Operational Research, 2008, 188(2): 603-609.

[7] MOR B, MOSHEIOV G. Scheduling problems with two competing agents to minimize minmax and minsum earliness measures [J]. European Journal of Operational Research, 2010, 206(3): 540-546.

[8] NONG Q Q, CHENG T C E, NG C T. Two-agent scheduling to minimize the total cost [J]. European Journal of Operational Research, 2011, 215(1): 39-44.

[9] WU Wen-Hsiang, XU Jianyou, WU Wen-Hung, et al. A tabu method for a two-agent single-machine scheduling with deterioration jobs [J]. Computers & Operations Re-search, 2013, 40(8): 2116-2127.

[10] 刘鹏, 周晓晔, 荣楠. 带有学习效应和恶化工件的双代理调度问题 [J]. 系统工程学报, 2012, 27(6): 841-846. LIU Peng, ZHOU Xiaoye, RONG Nan. Two-agent scheduling with a learning effect and deteriorating jobs [J]. Journal of System engineering, 2012, 27(6): 841-846.

[11] LIU Peng, YI Na, ZHOU Xiaoye. Two-agent single-machine scheduling problems under increasing linear deterioration [J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35(5): 2290-2296.

[12] YIN Yunqiang, WU Chin-Chia, CHENG Shuenn-Ren. Scheduling problems with two agents and a linear non-increasing deterioration to minimize earliness penalties [J]. Information Sciences, 2012, 189(7): 282-292.

(下转第 82 页)